היחידה למתמטיקה. סמסטר ב' תשפ"ב. מקצוע: חדו"א 2. מרצה: שי סרוסי

15:10-16:40 30.3.22

חדו"א 2 להנדסת תוכנה

<u>משך הבוחן</u> – שעה וחצי

<u>חומר עזר</u> – מחשבון רגיל, דף נוסחאות של הקורס (מצורף).

<u>הוראות מיוחדות</u> – הבוחן מורכב מ- 3 שאלות. עליכם לפתור את כולן.

הבוחן מכיל 5 עמודים (כולל דפי נוסחאות ודף זה). יש לכתוב בכתב יד ברור ומסודר ולפרט כל שלב בחישובים.

יש לרשום ליד כל תשובה את מספר השאלה, ומספר הסעיף, במידה וישנו. הסבירו היטב את תשובותיכם. תשובות ללא הסבר לא יתקבלו.

ניתן להגיש ערעור/בקשות שונות לגבי הבוחן במשך 7 ימים בלבד מיום קבלת הציון.

בהצלחה!

היחידה למתמטיקה. סמסטר ב' תשפ"ב. מקצוע: חדו"א 2. מרצה: שי סרוסי

שאלה מס' 1. (30 נקודות)

קבעו התכנסות בהחלט, התכנסות בתנאי או התבדרות של הטורים הבאים:

א. (15 נק') $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot 35^n}{(3n+1)!}$

ב. (15 נק') $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{37n+221}{5n^4+73n^2+33}\right)\cdot\left(\cos\left(\frac{131n+15}{124n^{12}+561n+19}\right)+5\right)$

שאלה מס' 2. (40 נקודות)

א. (20 נק') מצאו לאילו ערכים של הפרמטר k מתכנס הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{9^n}{k^{2n}}$.

ב. (20 נק') קבעו התכנסות בהחלט, התכנסות בתנאי או התבדרות של הטור

$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^3 n}$.

שאלה מס' 3. (30 נקודות)

תהי $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה. הפריכו את הטענות הבאות:

א. (10 נק') אם $\lim_{n\to\infty}(a_n^4)$ קיים אז $\lim_{n\to\infty}a_n$ קיים.

ב. (10 נק') אם $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ מתכנס אז $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^4$ מתכנס.

ג. (10 נק') אם $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^4$ מתכנס אז $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ מתכנס.

בהצלחה!

פתרון

שאלה מס' 1.

א. נתבונן בטור החיובי $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^n\cdot 35^n}{(3n+1)!}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{35^n}{(3n+1)!}$. לפי מבחן ד'אלמבר,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{35^{n+1}}{(3n+4)!}\cdot\frac{(3n+1)!}{35^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{35}{(3n+4)(3n+3)(3n+2)}=0<1$$

ולכן הטור מתכנס בהחלט.

ב. נתבונן בטור החיובי

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^n\left(\frac{37n+221}{5n^4+73n^2+33}\right)\cdot\left(\cos\left(\frac{131n+15}{124n^{12}+561n+19}\right)+5\right)\right|$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{37n+221}{5n^4+73n^2+33}\right)\cdot\left(\cos\left(\frac{131n+15}{124n^{12}+561n+19}\right)+5\right)$$

לכל n טבעי מתקיים

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{37n+221}{5n^4+73n^2+33}\right)\cdot\left(\cos\left(\frac{131n+15}{124n^{12}+561n+19}\right)+5\right)\le\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{37n+221}{5n^4+73n^2+33}\right)\cdot 6.$$

בנוסף, הטור $\sum_{n=1}^{\infty}6\cdot\left(\frac{37n+221}{5n^4+73n^2+33}\right)$ מתכנס לפי מבחן השוואה (גבולי) עם הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$ ולכן, לפי מבחן השוואה 1, הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{37n+221}{5n^4+73n^2+33}\right)\cdot\left(\cos\left(\frac{131n+15}{124n^{12}+561n+19}\right)+5\right)$ מתכנס.

מכאן, הטור הנתון מתכנס בהחלט.

שאלה מס' 2

א. הטור חיובי. נשתמש במבחן קושי $L=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{9^n}{k^{2n}}}=\frac{9}{k^2}$.

כאשר $\frac{9}{k^2}<1$ הטור מתכנס. כלומר, $k<-3 \;\; or \;\; 3<k \Leftarrow 9<k^2$.

כאשר $\frac{9}{k^2}>1$ הטור מתבדר. כלומר, $-3<k<3$.

נשים לב שכאשר $k=\pm 3$ הטור מתבדר (ניתן לראות ע"י הצבה).

לסיכום, כאשר $k<-3 \;\; or \;\; 3<k$ הטור מתכנס,

וכאשר $-3\le k\le 3$ הטור מתבדר.

ב. הטור חיובי. נשתמש במבחן האינטגרל (שימו לב שהפונקציה המתאימה היא מונוטונית יורדת בתחום $[2,\infty)$):

$$\int\frac{1}{x\ln^3 x}dx=\left|t=\ln x,\; dt=\frac{1}{x}dx\right|=\int\frac{1}{t^3}dt=-\frac{1}{t^2}+c=-\frac{1}{\ln^2 x}+c$$

$$\int_2^\infty\frac{1}{x\ln^3 x}dx=-\frac{1}{\ln^2 x}\Big|_2^\infty=-0-\left(-\frac{1}{\ln^2 2}\right)=\frac{1}{\ln^2 2}$$

האינטגרל מתכנס לכן גם הטור מתכנס.

שאלה מס' 3.

א. הטענה לא נכונה. דוגמה נגדית: $(a_n)_{n=1}^{\infty} = \left((-1)^n\right)_{n=1}^{\infty}$.

$\lim_{n\to\infty} a_n$ לא קיים אבל $\left(a_n^{\,4}\right)_{n=1}^{\infty} = \left((-1)^{4n}\right)_{n=1}^{\infty} = (1)_{n=1}^{\infty}$ ומתקיים $\lim_{n\to\infty}\left(a_n^{\,4}\right) = 1$.

ב. הטענה לא נכונה. דוגמה נגדית: $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n^{0.2}}$. הטור מתכנס לפי מבחן לייבניץ.
הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{0.8}}$ מתבדר כמסקנה ממשפט האינטגרל.

ג. הטענה לא נכונה. דוגמה נגדית: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$. הטור ההרמוני מתבדר, אבל הטור
$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$ מתכנס כמסקנה ממשפט האינטגרל.